

# 相关函数法求解土性参数相关距离

张 梅<sup>1, 2</sup>, 孙即超<sup>2</sup>, 李 健<sup>3</sup>

(1. 河北农业大学 城乡建设学院, 保定 071000; 2. 中国矿业大学(北京) 力学与建筑工程学院, 北京 100083;  
3. 华北电力大学 电子通讯系, 保定 071000)

**摘 要:** 介绍了相关距离在岩土工程应用中的实际物理意义, 探讨了相关函数法计算相关距离的基本思路、标准相关函数型式的选择标准以及一些典型土层的标准相关函数类型。计算中发现, 当土性参数的标准相关函数符合指数函数, 尤其是单指数时, 相关函数法能较合理地确定相关距离值。通过大量计算, 得出了石家庄市桥东区 3 种典型土层的相关距离的分布范围, 对于指导岩土工程勘测中的钻孔布置和取样间距具有一定的实际应用价值。同时得到相关距离具有区域性的特点, 分区域研究具有重要的实际意义。

**关 键 词:** 土性参数; 方差函数; 相关函数; 相关距离

**中图分类号:** TU 443 **文献标识码:** A

## Calculation of correlation distance of soil properties by correlation function

ZHANG Mei<sup>1,2</sup>, SUN Ji-chao<sup>2</sup>, LI Jian<sup>3</sup>

(1. College of Urban and Rural Construction, Agriculture University of Hebei, Baoding 071000, China; 2. College of Mechanics and Civil Engineering, China University of Mining and Technology, Beijing 100083, China; 3. College of Electric and Communication, North China Electric Power University, Baoding 071000, China)

**Abstract:** The characteristics of correlation distance of soil properties applied to geotechnical engineering are studied. And the basic method to calculate the correlation distance by correlation function is presented. The choosing criterions of standard correlation function are also discussed. It can be drawn that the value of correlation distance calculated by correlation function is reasonable when the standard correlation function is exponential function, especially single exponential function. At last, the paper provides the correlation distance of three representative soil layers in Shijiazhuang bridge east district, which will be useful for borehole distribution and sampling distance.

**Key words:** soil properties; variance function; correlation function; correlation distance

## 1 引 言

土是一种空间变异性很大的工程材料, 而岩土工程的勘察、试验和设计等的随机性都相当大, 用传统的确定论处理岩土工程问题是不合适的, 以随机的观点来分析才是合理的。美国学者 Vanmarcke. E. H 提出的土层剖面的随机场模型是分析计算土的空间平均特性的较好的数学工具。该模型用一个方差函数  $\Gamma^2(\Delta z)$  就可简捷地将“点方差”转化为“空间均值方差”。

Vanmarcke. E. H (1977 年) 对土的一维随机场的方差函数  $\Gamma^2(\Delta z)$  提出的近似表达式为<sup>[1]</sup>:

$$\Gamma^2(\Delta z) = \begin{cases} 1, & \Delta z \leq \delta_u \\ \delta_u / \Delta z, & \Delta z \geq \delta_u \end{cases} \quad (1)$$

标准差折减系数  $\Gamma(\Delta z)$  的表达式为

$$\Gamma(\Delta z) = \begin{cases} 1, & \Delta z \leq \delta_u \\ \sqrt{\delta_u / \Delta z}, & \Delta z \geq \delta_u \end{cases} \quad (2)$$

式中  $\delta_u$  称为土性的相关距离 (correlation distance), 是随机场模型具体应用于岩土工程的一个非常重要的参数。从工程实用意义上讲,  $\delta_u$  表示土性指标  $X(z)$  有密切的相关关系的那段距离, 在该距离范围内, 土性指标基本上是相关的, 任何两点的距离超过了  $\delta_u$ , 就视为不相关了。

目前计算相关距离的方法主要有相关函数法、递推平均法、平均零跨距法等。本文主要对相关函数法进行分析。

## 2 相关距离和标准相关函数

Vanmarcke. E. H 认为, 当  $\Delta z$  相对较大时空间均值方差与  $\Delta z$  近于成反比关系, 于是给出

$$\Gamma^2(\Delta z) = \delta_u / \Delta z \quad (3)$$

即  $\delta_u = \Delta z \Gamma^2(\Delta z)$ 。 $\delta_u$  称为相关距离。其解析表达式为

$$\delta_u = \lim_{\Delta z \rightarrow \infty} \Delta z \Gamma^2(\Delta z) =$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow \infty} \int_0^{\Delta z} \left(1 - \frac{t}{\Delta z}\right) \rho(\tau) d\tau = 2 \int_0^{\Delta z} \rho(\tau) d\tau \quad (4)$$

由式 (4) 知, 只要确定了标准相关函数  $\rho(\tau)$  的类型, 便可利用该式积分求得  $\delta_u$ 。在土工计算中应用较多的几种标准相关函数类型及其对应的相关距离计算公式见表 1。

表 1 标准相关函数类型及相关距离对应表  
Table 1 Table of four kinds of standard correlation function and correlation distance

| 类型     | $\rho(\tau)$                  | $\delta_u$            |
|--------|-------------------------------|-----------------------|
| 单指数    | $e^{-b\tau}$                  | $2/b$                 |
| 二次指数   | $e^{-(b\tau)^2}$              | $\sqrt{\pi}/b$        |
| 指数余弦 1 | $e^{-b\tau} \cos(b\tau)$      | $1/b$                 |
| 指数余弦 2 | $e^{-b\tau} \cos(\omega\tau)$ | $2b/(b^2 + \omega^2)$ |

注: 其中  $b > 0$ ,  $\omega > 0$ 。

相关函数法的基本思路如下:

(1) 对原始数据进行标准化处理 (先对土性参数原始数据进行线性回归, 求得趋势分量, 再利用式 (6) 进行标准化处理, )。

$$X_s = [X(z) - \bar{X}(z)] / \tilde{X}(z) \quad (5)$$

式中:  $\bar{X}(z)$  为  $X(z)$  的趋势分量,  $\tilde{X}(z)$  为  $X(z)$  的标准差。标准化后的  $X_s(z)$  可以视为“统计匀质”, 即  $\bar{X}(z) = 0$ ,  $\tilde{X}(z) = 1$ 。

(2) 对  $\Delta z$  取为取样间距  $\Delta z_0$  的倍数, 即  $\Delta z = i\Delta z_0$ ,  $i$  取不同的值, 计算:

$$\rho(\tau) = \rho(\Delta z) = \rho(i\Delta z_0) = E[X(z)X(z + \Delta z)] \cdot \frac{1}{n-i} \sum_{k=0}^{n-i} X(z_k)X(z_{k+1}) \quad (6)$$

从而取得标准相关函数的一系列计算值;

(3) 利用计算值点绘出  $\rho(\tau)$ - $\tau$  图;

(4) 根据  $\rho(\tau)$ - $\tau$  图确定标准相关函数的拟合型式;

(5) 进行方程的回归, 确定参数的值;

(6) 查表计算相关距离  $\delta_u$ 。

## 3 标准相关函数类型的选择

在利用相关函数法求解相关距离的过程中, 确定标准相关函数类型是非常关键的一步, 对于同一组数据, 用不同类型的标准相关函数拟合, 结果差异很大<sup>[2]</sup>。笔者认为, 当所选用的标准相关函数既能适应 Vanmarcke. E. H 模型, 又符合土的实际情况时, 最好应用相关函数法求解相关距离。

### 3.1 不同类型的标准相关函数对 Vanmarcke. E. H 模型的适应性

为了分析表 1 中所列的标准相关函数对 Vanmarcke. E. H 模型的适应性, 本文作出了该 4 种型式的  $\Gamma(\Delta z) - \Delta z / \delta_u$  与 Vanmarcke. E. H 模型 (式 (2)) 的比较图, 如图 1 所示。4 种相应地方差函数  $\Gamma^2(\Delta z)$  的表达式见表 2。

表 2 标准相关函数及相应的方差函数对照表  
Table 2 Table of the standard correlation functions with its variance function

| $\rho(\tau)$                            | 方差函数 $\Gamma^2(\Delta z)$                                                                                                                                                               |
|-----------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 单指数<br>$e^{-b\tau}$                     | $\frac{2}{b^2 \Delta z^2} (b\Delta z + e^{-b\Delta z} + 1)$                                                                                                                             |
| 二次指数<br>$e^{-(b\tau)^2}$                | $\frac{2}{b^2 \Delta z^2} \{ \sqrt{\pi} b \Delta z [2 \operatorname{Erf}(\Delta z \cdot b) \sqrt{2} b \Delta z - 1] + e^{-(b\Delta z)^2} - 1 \}$                                        |
| 指数余弦 1<br>$e^{-b\tau} \cos(b\tau)$      | $\frac{2}{b^2 \Delta z^2} (b\Delta z + e^{-b\Delta z} \sin(b\Delta z))$                                                                                                                 |
| 指数余弦 2<br>$e^{-b\tau} \cos(\omega\tau)$ | $\frac{2}{\Delta z^2 (b^2 + \omega^2)^2} \{ b\Delta z (b^2 + \omega^2) + (\omega^2 - b^2) - e^{-b\Delta z} [2\omega b \sin(\omega\Delta z) + (\omega^2 - b^2) \cos(\omega\Delta z)] \}$ |

注:  $\operatorname{Erf}(x)$  为误差函数, 当  $x$  从  $-\infty \rightarrow +\infty$  时,  $\operatorname{Erf}(x)$  的值从 -1 变化到 +1, 且  $\operatorname{Erf}(0) = 0$ 。

$$\operatorname{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\Delta z^2} d\Delta z - 1 \quad (7)$$

从图 1 和其数据的计算过程可以看出, 指数余弦型 2 可通过调整其参数  $b$ ,  $\omega$  使之达到与 Vanmarcke. E. H 模型非常接近的程度, 而指数余弦型 1 是指数余弦型 2 的特例 ( $b=\omega$ ), 它与 Vanmarcke. E. H 模型的偏离较大; 两种指数型标准相关函数均与 Vanmarcke. E. H 模型偏离不大, 而单指数型更能贴近 Vanmarcke. E. H 模型。

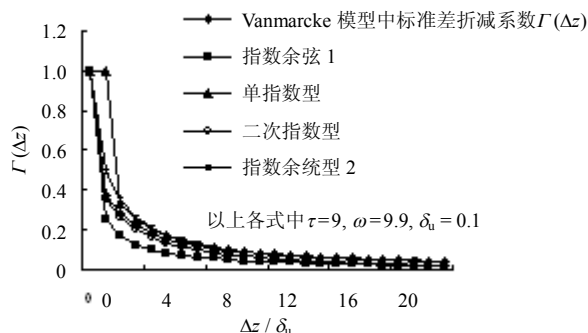


图 1 4 种标准相关函数的  $\Gamma(\Delta z)$  拟合比较  
Fig.1 Fittings and comparisons of the four kinds of  $\Gamma(\Delta z)$

### 3.2 实际土层的相关函数类型

实际土层的标准相关函数属何种类型, 应视其实测计算的  $\rho(\tau)-\tau$  散点图与不同类型标准相关函数拟合程度而定。但正如文献[2]指出的, 对于一组点绘的  $\rho(\tau)-\tau$  的试验曲线, 从理论上讲, 该曲线应随着间距  $\tau$  的增加逐渐趋于 0, 但实际得到的曲线却在中后部摆动剧烈, 见图 2、图 3。这是由于随着  $\tau$  值的增加, 用于求解  $\rho(\tau)$  的数据逐渐减少, 求得的  $\rho(\tau)$  可信度降低所致。为了解决这一问题, 文[2]提出对  $\rho(\tau)-\tau$  曲线中后部视具体情况将其删去, 但应从何处删去, 实际上是很难操作的。因此, 相关函数法在拟合过程中不可避免地纳入了中后部的失真信息。函数与中后部的拟合程度越高, 其计算结果就越不合理。以下例具体说明。

表 3 不同深度处的不排水抗剪强度  
Table 3 Value of the undrained sheared strength

| 深度 /m | $c_u$ /kPa | 深度 /m | $c_u$ /kPa | 深度 /m | $c_u$ /kPa |
|-------|------------|-------|------------|-------|------------|
| 6.98  | 20.10      | 13.81 | 34.50      | 20.85 | 64.60      |
| 7.99  | 20.10      | 14.81 | 36.90      | 21.85 | 65.50      |
| 8.99  | 18.70      | 15.82 | 29.70      | 22.86 | 53.20      |
| 10.00 | 27.80      | 16.86 | 35.40      | 23.90 | 53.60      |
| 10.82 | 34.00      | 17.73 | 46.90      | 24.90 | 50.80      |
| 11.80 | 32.60      | 18.84 | 37.80      | 25.90 | 54.60      |
| 12.80 | 35.40      | 19.84 | 63.70      | 26.90 | 70.40      |

纽约市 West Side 高速公路附近的巨厚软黏土层 (厚度  $h=20$  m) 不排水抗剪强度现场十字板试验结果<sup>[3]</sup> 见表 3。由表 3 可见, 该场地取样间距  $\Delta z_0$  除少数稍小于 1.0 m 外, 绝大多数等于或稍大于 1.0 m, 本文计算中按  $\Delta z_0=1.0$  m 的等间距考虑。

按前述步骤分别用表 1 中的 4 种标准相关函数的拟合结果见表 4 和图 2, 图 3。

表 4 相关函数法计算结果  
Table 4 Results of correlation function method

| 标准相关函数类型 | 拟合结果                         | 残差平方和 | $\delta_u$ /m |
|----------|------------------------------|-------|---------------|
| 单指数      | $e^{-1.1\tau}$               | 2.27  | 1.82          |
| 二次指数     | $e^{-(0.9\tau)^2}$           | 2.23  | 1.97          |
| 指数余弦 1   | $e^{-1.1\tau} \cos(1.1\tau)$ | 0.72  | 0.91          |
| 指数余弦 2   | $e^{-0.1\tau} \cos(0.7\tau)$ | 0.57  | 0.4           |

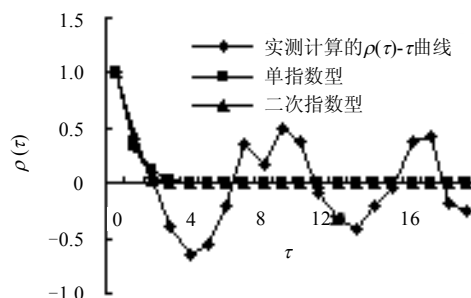


图 2 指数型相关函数的拟合结果  
Fig.2 Fitting results of the exponential correlation functions

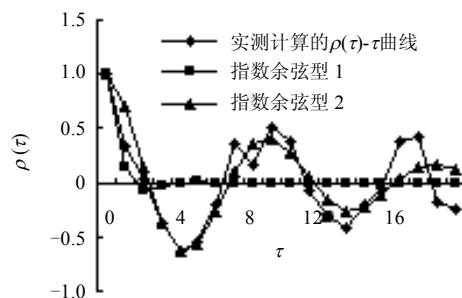


图 3 指数余弦型相关函数的拟合结果  
Fig.3 Fitting results of the exponential cosine correlation functions

从表 4 和图 2、图 3 中可以看出, 4 种标准相关函数中拟合程度较高的是两种指数余弦型, 但对其结果稍加分析便不难看出, 原始数据的采样间距是 1 m, 而用该种标准相关函数类型计算的相关距离分别是 0.91 m 和 0.4 m。如果此结果正确, 便会得出如下结论: 原来不带有任何相关信息的数据 (取样间距大于相关距离) 却计算出了相关距离, 这显然是不合理的, 而且拟合程度最高的指数余弦型 2

(残差平方合为 0.57) 其相关距离计算值 (0.4 m) 最不合理。仔细观察比较图 2、图 3 不难发现, 指数余弦型标准相关函数主要是对中后部失真数据的拟合优于指数型, 而对前部真实数据的拟合度, 指数余弦型反倒不如指数型。本例说明中后部较多的失真数据的介入, 会使相关距离的计算值明显偏小。

### 3.3 对 3 种典型土层的相关距离的计算及其范围

对石家庄市桥东区典型土层的大量计算表明, 对于前部数据的拟合优度高者, 总是指数型标准相关函数, 其中又以单指数型居多。指数余弦型极少见。尽管指数余弦型 2 的标准相关函数最能适应 Vanmarcke. E. H 模型, 但它并不符合大多数土层的实际情况 (至少对石家庄市桥东区的土层如此), 故笔者建议用指数型相关函数求相关距离。由上述可知, 当实际土层的相关函数为单指数型时, 会更接近 Vanmarcke. E. H 模型, 也就最适于应用相关函数法求相关距离, 相关函数法因不能避免中后部失真数据的干扰, 其算得的  $\delta_u$  值可能常会偏小。如何合理地删除中后部的失真信息, 使计算结果更真实, 这是今后应该继续研究的问题。3 种典型土层的相关距离范围见表 5。

由表 5 可见, 石家庄市桥东区三个典型土层的相关距离在 0.3 m ~ 0.6 m 之间。

表 5 3 种土层的相关距离范围  
Table 5 Distribution range of three soil layers

| 土层性质  | 样本数量/个 | 分布范围/m      | 平均值/m |
|-------|--------|-------------|-------|
| 粉质黏土层 | 153    | 0.257~0.516 | 0.340 |
| 粉土层   | 139    | 0.240~0.746 | 0.551 |
| 粉细砂层  | 111    | 0.291~0.780 | 0.605 |

## 4 结 语

(1) 石家庄市桥东区 3 个典型土层的相关距离在 0.3 ~ 0.6 m 之间。这对于该地区 3 种土层的钻孔和取样间距的大小具有一定的指导意义。

(2) 相关函数法计算相关距离是一种较实用的方法。

(3) 任何型式的相关函数都会与土的实际相关性有拟合误差, 当土性指标的标准相关函数符合指数函数, 尤其是单指数函数时, 相关函数法能较合理地确定相关距离值。但相关函数法无法摒弃中后部失真数据的影响, 这可能使其计算的相关距离值偏低。

(4) 由于土的空间变异性很大, 因此相关距离具有区域性的特点, 分区域研究具有重要的实际意义。

## 参 考 文 献

- [1] Erik H, Vanmarcke. Probabilistic modeling of soil profiles[J]. *Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE*, 1977, 103(G11): 1 227—1 246.
- [2] 闫澍旺, 贾晓黎等. 土性剖面随机场模型的平稳性和各态历经性的验证[J]. *岩土工程学报*, 1995, 17(3): 1—9.
- [3] Ravi V. Statistical modeling of spatial variability of undrained strength[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1992, 29: 721—729.
- [4] 张梅. Vanmarck. E. H 模型适用性和土性相关距离的研究[D]. 河北: 河北农业大学, 1999.